Marius Burtea

Georgeta Burtea

MATEMATICĂ

clasa a IX-a

- **ALGEBRĂ**
- **GEOMETRIE TRIGONOMETRIE**

EDITURA CARMINIS
educațional

CUPRINS

ELEMENTE DE ALGEBRĂ

I. MULȚIMI ȘI ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

1 MULȚIMEA NUMERELOR REALE

Noțiuni teoretice

Mulțimi remarcabile de numere reale:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$; (mulțimea numerelor **naturale).**
- $\mathbb{Z} = \{..., -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., n, ...\}$; (mulțimea numerelor **întregi).**
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{x}{y} \middle| x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0\right\}$; (mulțimea numerelor **raționale).**
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ = mulțimea numerelor **iraționale.**
- $\mathbb{R}$ = mulțimea numerelor **reale.**

Au loc relațiile: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $\mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$; $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \varnothing$.

Adunarea numerelor reale

Este operația algebrică care asociază oricărei perechi $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un unic număr real notat $x + y$, numit suma numerelor x, y.

Proprietăți:

Pentru oricare numere reale x, y, z au loc proprietățile:

1. $x + y = y + x$, (comutativitatea)

2. $(x + y) + z = x + (y + z)$, (asociativitatea)

3. $x + 0 = 0 + x = x$, (0 este element neutru pentru adunare)

4. $x + (-x) = (-x) + x = 0$, (orice număr real x are opus numărul $-x$).

Înmulțirea numerelor reale

Este operația algebrică care asociază oricărei perechi $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un unic număr real notat $x \cdot y$ sau xy, numit produsul lui x cu y.

Proprietăți:

Pentru oricare numere reale x, y, z au loc proprietățile:

1. $xy = yx$, (comutativitatea)

2. $(xy)z = x(yz)$, (asociativitatea)

3. $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, (1 este element neutru pentru înmulțire)

4. $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$, pentru $x \neq 0$; (orice număr real $x \neq 0$ are inversul $\frac{1}{x}$)

5. $x(y+z) = xy + xz,$ $(x+y)z = xz + yz.$ (înmulțirea este distributivă față de adunare)

Puteri cu exponent întreg

• Pentru $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^*$ se definește:

$x^1 = x,\ x^2 = x \cdot x,\ x^3 = x^2 \cdot x,\ \ldots,\ x^n = x^{n-1} \cdot x$ (puterea cu exponent natural).

• Pentru $x \in \mathbb{R}^*$ și $n \in \mathbb{N}$ se definesc:

$x^0 = 1;\ x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, (puterea cu exponent întreg).

• **Reguli de calcul cu puteri cu exponent întreg**

Pentru oricare $a, b \in \mathbb{R}^*$ și $m, n \in \mathbb{Z}$ au loc egalitățile:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

3. $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$;

4. $(ab)^m = a^m \cdot b^m$.

Rădăcina pătrată a unui număr real pozitiv x, notată $\sqrt{x}$, este numărul real pozitiv al cărui pătrat este egal cu x.

Așadar, $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x,\ \forall x > 0;$
$\sqrt{x} > 0,\ \forall x > 0;\ \sqrt{0} = 0.$

• **Reguli de calcul cu radicali**

Fie $x, y \in (0, +\infty)$. Atunci au loc egalitățile:

1. $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{xy}$;

2. $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$;

3. $\left(\sqrt{x}\right)^n = \sqrt{x^n},\ n \in \mathbb{Z}$;

4. $x\sqrt{y} = \begin{cases} \sqrt{x^2 y}, & x > 0,\ y > 0 \\ -\sqrt{(-x)^2 y}, & x < 0,\ y > 0 \end{cases}$

(introducerea factorului sub radical)

1.1. OPERAȚII ALGEBRICE CU NUMERE REALE

□ **1.** Se consideră numerele zecimale $x = \frac{78}{10^3}$ și $y = \frac{52}{10^2}$.

Să se scrie sub formă de fracție zecimală numerele:

$x + y;\ y - x;\ xy;\ x^2;\ y^3;\ (10x + y)^2;\ \left(x - 10^{-1}y\right)^{-2}.$

□ **2.** Să se efectueze:

a) $$\frac{\left(\frac{7}{48} + \frac{13}{24} - \frac{3}{4}\right) \cdot 6\frac{2}{5} - 3\frac{1}{5}\left(2\frac{3}{5} - 5\frac{1}{10}\right)}{\left(\frac{4}{7} - \frac{1}{5}\right) : \frac{26}{35} - \frac{43}{10}};$$

b) $\left(\sqrt{3}\right)^5 : \left(-\sqrt{3^3}\right) - 3\cdot\sqrt{0,(3)}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-3}$;

c) $\left[\sqrt{6561}\cdot\dfrac{-3,4(1)}{-27,(9)} - \left(\dfrac{4}{3}\right)^{-2}\cdot 0,(4)\right]\cdot\left(\dfrac{-6}{\sqrt{7}}\right)^2\cdot\dfrac{1}{10}$;

d) $\dfrac{1}{\sqrt{10^4}} - \sqrt{9,61} : (3,1)^{-1} + \sqrt{0,0576}\cdot(0,2)^{-2}$;

e) $\left[-1,2(5)+0,1(4)\right]\cdot\left[12-1,1(5)-1,8(4)\right]$.

❑**3.** Să se efectueze:

a) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{\left(1\dfrac{7}{18}\cdot\dfrac{8}{75}+\dfrac{15}{8}\cdot\dfrac{32}{45}\right):2\dfrac{2}{3}}{2\dfrac{4}{5}\left(\dfrac{20}{63}\cdot 2\dfrac{7}{10}-\dfrac{25}{28}:1\dfrac{1}{14}\right)}$;

b) $0,1(2)\cdot\left[99+\dfrac{\dfrac{3}{4}-0,25}{\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}}:0,75-3\dfrac{1}{4}:\left(0,225+\dfrac{1}{10}\right)\right]$;

c) $\left[\left(5+2\sqrt{6}\right)^4+\dfrac{1}{\left(5-2\sqrt{6}\right)^4}\right]\cdot\dfrac{\left(40-16\sqrt{6}\right)^4}{1024}$;

d) $\dfrac{\left(-\dfrac{3}{7}\right)\cdot\dfrac{14}{11}:\dfrac{33}{484}-\left(-2^3\right)-\left[-\dfrac{1}{0,(6)}\right]^2:2\dfrac{1}{4}}{\left(\dfrac{13}{10}-5,2\right)+\left[0,5(3)-2,(3)\right]-\left(-7\dfrac{1}{2}+5\dfrac{3}{4}\right)+1,95}$.

❑**4.** Să se arate că următoarele numere sunt inverse unul altuia:

$x=\left[\left(\dfrac{7}{45}+\dfrac{11}{30}-\dfrac{5}{12}\right):1,0(5)-0,05\right]:\dfrac{1}{40}$,

$y=\left\{0,8(3)+\left[0,1(6)-0,(4)+0,08(3)\right]:\dfrac{7}{3}\right\}\cdot\dfrac{7}{20}+\dfrac{19}{80}$.

❑**5.** Se dau numerele reale $a=5-2\sqrt{6}$ și $b=2\sqrt{6}+5$. Să se arate că cele două numere sunt inverse unul altuia și că $\sqrt{a^2+b^2}=\dfrac{b-a+3\sqrt{ab}+5}{\sqrt{3}}$.

❑**6.** Se dau numerele reale:

$A=\left|2\dfrac{3}{10}-15\dfrac{1}{5}\right|:(-0,86)\cdot 0,0(6)$ și $B=\dfrac{1,6(1)-3,3(8)-1,(2)}{6:6\dfrac{2}{3}-6\dfrac{3}{5}\cdot 1\dfrac{3}{22}-\dfrac{2}{5}}-1,(428571)$.

Să se calculeze:

a) $A-B$; $A+7B$; $\dfrac{A^2+B^2}{3A-B}$;

b) suma inverselor numerelor A și B;

c) suma opuselor numerelor A și B.

❑ **7.** Dacă $\dfrac{a}{3}-\dfrac{b}{8}+\dfrac{c}{11}=0,91$, să se calculeze valoarea expresiei:

$$E=\frac{c}{22}\cdot\frac{200}{91}+\frac{b}{8}\cdot\frac{100}{-91}-\left(-\frac{100}{91}\right)\cdot\frac{a}{3}-1.$$

❑ **8.** Dacă $a^2+b^2-2a-4b+5=0$, să se calculeze $a^{2005}+(b-a)^{2005}$.

❑ **9.** **a)** Dacă $4x^2+9y^2=256$ și $2x+3y=20$, să se calculeze xy, $2x-3y$, x și y.

b) Dacă $3a-5b=8$ și $9a^2+25b^2=160$, să se calculeze ab, $3a+5b$, a, b.

❑ **10.** Fie a și b numere reale cu proprietatea că $a+b=10$ și $ab=15$. Să se calculeze:

a) a^2+b^2, a^3+b^3, a^4+b^4, a^6+b^6;

b) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$, $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$, $\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}$, $\dfrac{1}{a^4}+\dfrac{1}{b^4}$, $\dfrac{1}{a^5}+\dfrac{1}{b^5}$.

❑ **11.** Să se determine numerele reale a și b, respectiv x și y dacă:

a) $2a^2+25b^2+5(2a+5)-10ab=0$;

b) $5x^2+9y^2-6x(2-y)+9=0$.

❑ **12.** Să se verifice dacă raportul $r=\dfrac{24a-9b}{14a-12,9b}$ este pătratul unui număr real știind că $\dfrac{2a}{7b}=3\cdot10^{-1}$.

❑ **13.** Știind că $\dfrac{a}{b}=2,(6)$, să se stabilească dacă raportul $r=\dfrac{7a+2,(6)b}{5a-13b}$ este cubul unui număr real.

❑ **14.** Să se stabilească valoarea de adevăr a următoarelor relații:

a) $a(b+c)(b+c-a)+b(a+c)(a+c-b)+c(a+b)(a+b-c)=6abc$;

b) $\left[4ab-(a^2+1)(b^2+1)\right]^2-(a^2-1)^2(b^2-1)^2=4(a-b)^2(1-ab)^2$;

c) $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)=a^3+b^3+c^3-3abc+$
$+3(a+b+c)(ab+bc+ca)$;

d) $(a+b+c)^3-(-a+b+c)^3-(a-b+c)^3-(a+b-c)^3=24abc$;

e) $\dfrac{1}{1+a+2a^2+a^3+a^4}+\dfrac{1}{a^4-a^3+2a^2-a+1}\geq\dfrac{2}{a^4+a^2+1}$;

f) $\left(\dfrac{a+b}{1-ab}-\dfrac{a-b}{1+ab}\right):\left(1+\dfrac{a^2-b^2}{1-a^2b^2}\right)=\dfrac{2b}{b^2-1}$;

g) $\left[\left(\dfrac{a+1}{a-1}\right)^3-1+3\left(\dfrac{a+1}{a-1}\right)-3\left(\dfrac{a+1}{a-1}\right)^2\right]:\left[1-\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^3+3\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)\left(\dfrac{a-1}{a+1}-1\right)\right]=$

$=\left(\dfrac{a+1}{a-1}\right)^3$;

h) $\dfrac{a+2}{a-2}:\left(\dfrac{6a}{a^3-8}+\dfrac{2a}{a^2+2a+4}+\dfrac{1}{2-a}\right)-\dfrac{4a+4}{a-2}\le a.$

❒ **15.** Să se efectueze operațiile cu puteri cu exponent întreg:

a) $4^2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{15}\cdot\left(\dfrac{1}{8}\right)^{\sqrt{81}}\cdot 16^5$;

b) $\dfrac{12^{-4}}{\left(4^2\right)^3}\cdot\dfrac{\left(2^3\right)^8}{6^3}\cdot(1,5)^5$;

c) $\left[3\cdot 5^2-3\left(4+3^2-1^5\right)^3\cdot\left(4\cdot 2^3-8\cdot 2^2\right)^4\right]:15^{2^0}$;

d) $5^{18}\cdot 5^{-6}+6^{203}\cdot 36^{-100}-4\cdot\left(2^2\right)^5:\left\{5^4\cdot\left(5^3\right)^2\cdot 25+\left(6^{50}\right)^2\cdot\left[(3\cdot 2)^{33}\right]^{-3}\cdot\right.$

$\left.\cdot(2\cdot 3)^2-2^9\cdot 8\right\}$;

e) $\left(-\dfrac{4}{5}\right)^{-2}\cdot\left[\left(-\dfrac{5}{6}\right)^3\right]^{15}:\dfrac{125^3}{24^3}:\left[\left(\dfrac{36}{25}\right)^{10}\right]^{-2}-\left(\dfrac{25}{48}\right)^2:\left(-\dfrac{5}{4}\right)^{-2}:\left(-\dfrac{15}{32}\right)^3\cdot$

$\cdot\dfrac{(-5)^{-2}\cdot\left[(-2)^2\right]^{-2}}{(-3)^{-3}}.$

❒ **16.** Să se efectueze:

a) $\dfrac{a^{-2}-9b^{-2}}{a^{-2}-b^{-2}}\cdot\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{3b^{-1}+a^{-1}}$;

b) $\dfrac{a^{-3}+b^{-3}}{a^{-1}-b^{-1}}\cdot\dfrac{a-b}{a^{-2}-a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}$;

c) $\left[a-(2-a)^{-1}\right]^{-1}:\left[\dfrac{a(a-2)+a^0}{a^0-\left(a-a^0\right)}\right]^{-1}$;

d) $\left[\left(a^2-\dfrac{1}{b^2}\right)^a\cdot\left(b+\dfrac{1}{a}\right)^{b-a}\right]:\left[\left(b^2-\dfrac{1}{a^2}\right)^b\cdot\left(a-\dfrac{1}{b}\right)^{a-b}\right].$

❑ **17.** Să se scrie sub formă mai simplă expresiile:

a) $\left[\dfrac{\left(2a^{-1}x^{-n}\right)^2}{by^{-1}}\right]^{-2}\cdot\left[\dfrac{a^2x^n}{4\left(b^{-1}y^2\right)^2}\right]^{-2}$;

b) $a^3\left(a^n\right)^n\cdot\left(\dfrac{a}{a^n}\right)^{-n}-\dfrac{a^{7n}\cdot\left(a^4\right)^n}{a^5}-\dfrac{1}{a^{n+1}}\cdot\left(a^{n^2+4}-a^{6n}\right)\cdot\left(a^{6n-4}+a^{n^2}\right)$.

❑ **18.** **a)** Să se scrie sub formă mai simplă expresia:

$\left(a+b\right)\left(a^2+b^2\right)\left(a^4+b^4\right)\left(a^8+b^8\right)\ldots\left(a^{2^n}+b^{2^n}\right)$.

b) Fie $A=\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{a^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{a^4}\right)\ldots\left(1+\dfrac{1}{a^{2^n}}\right)$. Pentru $a=2$, să se arate că $A<2$.

❑ **19.** Care sunt valorile posibile ale expresiilor:

a) $E_1=(-1)^{k+1}\left(-\dfrac{2}{3}\right)-(-1)^{k+1}\cdot\dfrac{1}{3}+(-1)^{k+2}$, $k\in\mathbb{N}$;

b) $E_2=-\dfrac{2}{5}(-1)^{n^2+n}+\dfrac{1}{2}(-1)^{n+2}+\dfrac{(-1)^{2m+3}}{10}$, $m, n\in\mathbb{N}$;

c) $E_3=-\dfrac{3}{4}(-1)^{m+5}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}(-1)^{n+2}-\dfrac{7}{2}(-1)^{2p+3}+\dfrac{1}{2}\cdot(-1)^{q^2+q+5}$, $m, n, p, q\in\mathbb{N}$?

❑ **20.** Care este valoarea maximă a expresiei:

$E=\dfrac{5}{2}(-1)^{2m+n+1}-\left(-\dfrac{2}{5}\right)(-1)^{m+2n}-\dfrac{3}{4}(-1)^{n+1}-3\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}\right)\cdot(-1)^{m+1}$, $m, n\in\mathbb{N}$?

❑ **21.** Dacă $2a(a-5)+2b(b-1)+13=0$ să se calculeze:

$(a-1)^{2005}+(a-8b)^{2005}$.

❑ **22.** Să se calculeze folosind operațiile cu radicali:

a) $\left(\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{32}-\sqrt{200}\right)-\left(\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{27}\right)$;

b) $\left(\sqrt{75}+\sqrt{21}+\sqrt{1}\right)\cdot\left(1+\sqrt{12}\right)$;

c) $\left(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{72}-5\sqrt{20}-2\sqrt{2}\right)$;

d) $\sqrt{2}+\sqrt{2^2}+\sqrt{2^3}+\ldots+\sqrt{2^{2005}}$.

❑ **23.** Să se determine media aritmetică, media geometrică și media armonică a numerelor a și b, știind că:

a) $a=\sqrt{98}+\sqrt{32}-\sqrt{50}$, $b=\sqrt{162}+\sqrt{18}-\sqrt{72}$;

b) $a=3\sqrt{128}+\sqrt{200}-2\sqrt{242}$, $b=\sqrt{32}-\sqrt{288}+2\sqrt{450}$;

c) $a=\dfrac{\sqrt{16^2+12^2}+\sqrt{16^2-12^2}-\sqrt{16-12}}{18+2\sqrt{28}}$,

$$b=\left[\frac{1}{48}:\sqrt{\frac{25}{256}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\sqrt{20,25}-1\right]:\sqrt{0,32(1)};$$

d) $a=\sqrt{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{7-2\sqrt{6}}+2\sqrt{5}+5}$, $b=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{\sqrt{4}+5-2\sqrt{5}}$.

❐ **24.** Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor:

$p_1:\sqrt{5n+2}\in\mathbb{N},\ \forall\ n\in\mathbb{N};$

$p_2:\sqrt{2+2\cdot3^n+9^n}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\ \forall\ n\in\mathbb{N};$

$p_3:\sqrt{4-\sqrt{15}}\cdot\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\in\mathbb{N};$

$p_4:\left(\sqrt{5}-2\right)^{-1}\cdot\dfrac{5-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}-\left[\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^{-1}-\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^{-1}\right]^2\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}.$

❐ **25.** Să se arate că expresia $\left[\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}}\right]^{-2}+\left[\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{\left(7+4\sqrt{3}\right)^{-1}}\right]^{-2}$ nu este număr irațional.

❐ **26.** Dacă x este partea întreagă a numărului $-24,71$ și $x-8y=7$, să se calculeze $\sqrt{(x-7)^2-15y^2}+\sqrt{(x+25)^2-15\left(y^3+64\right)}$.

❐ **27.** Să se arate că următoarea expresie nu depinde de x:

$$E(x)=x\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{16-x^2}+8}{\sqrt{\sqrt{16-x^2}+4}}-\sqrt{(x+4)^3}+\sqrt{(4-x)^3},\ x\in[-4,\ 4].$$

❐ **28.** Să se arate că dacă $x\in[-1,\ 1]$, $y\in[-3,\ 4]$, atunci expresia $\sqrt{(x+y-5)^2}+\sqrt{(2x+y+5)^2}-\sqrt{(x-y-4)^2}+\sqrt{(2x-y-5)^2}$ nu depinde de x și y.

❐ **29.** Să se scrie ca sumă algebrică de doi radicali simpli: $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; $\sqrt{5-\sqrt{21}}$; $\sqrt{17+12\sqrt{2}}$; $\sqrt{5-\sqrt{24}}$; $\sqrt{3+2x\sqrt{3-x^2}}$, $x\in\left[0,\ \sqrt{3}\right]$; $\sqrt{8a-2\sqrt{16a^2-9}}$, $a>\dfrac{3}{4}$.

❐ **30.** Să se arate că numerele A, B, C sunt raționale dacă:

$$A=\sqrt{13-30\sqrt{2-\sqrt{9-4\sqrt{2}}}}+\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}};$$

$$B=\sqrt{26+6\sqrt{13-4\sqrt{8+2\sqrt{6-\sqrt{20}}}}}+\sqrt{26-6\sqrt{13+4\sqrt{8-2\sqrt{6+\sqrt{20}}}}};$$

$$C=\sqrt{25+4\sqrt{8-2\sqrt{6+2\sqrt{5}}}}-\sqrt{25-4\sqrt{8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}}}.$$

❑ **31.** Să se arate că $\frac{2a-b}{2b+a} \in \mathbb{Q}$ știind că:

$a = \sqrt{3-\sqrt{5}+\sqrt{9-4\sqrt{5}}}$ și $b = \sqrt{\sqrt{7}-1-\sqrt{11-4\sqrt{7}}}$.

❑ **32.** Se consideră numerele $a = \sqrt{28-16\sqrt{3}}$ și $b = \sqrt{3+\sqrt{3}-\sqrt{13+\sqrt{48}}}$.

Să se arate că $\left(\frac{b^2-a}{a+\sqrt{8}b} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in \mathbb{Q}$.

❑ **33.** Să se arate că dacă $a = \sqrt{4+\sqrt{11}+\sqrt{23-2\sqrt{132}}}$ și $b = \sqrt{\sqrt{97+56\sqrt{3}}}$, atunci $\frac{b^2-4a}{b-a} \in \mathbb{N}$.

❑ **34.** Dacă $a = \sqrt{8-2\sqrt{15}} - \sqrt{8+2\sqrt{15}}$, să se calculeze $\left(a+2\sqrt{3}\right)^{2004}$.

❑ **35.** Dacă $n = \sqrt{5+\sqrt{24}} - \sqrt{8} - \sqrt{5-\sqrt{24}}$, să se calculeze n^{2004}.

❑ **36.** Dacă $\frac{3a-4b}{a+2b} = \sqrt{\frac{6,4(4)-0,2(7)+2,8(3)}{2,6(6)+4,(4)}}$, să se calculeze 27% din numărul $\frac{20a}{b}$.

❑ **37.** Să se raționalizeze numitorii fracțiilor:

a) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; **b)** $\frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{7}}}$; **c)** $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$;

d) $\frac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{10}}$; **e)** $\frac{1}{6\sqrt{2}-9}$; **f)** $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}$;

g) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; **h)** $\frac{1}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}$; **i)** $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}$.

❑ **38.** Să se scrie sub formă mai simplă expresiile:

a) $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{12}+\sqrt{5}+2}{\sqrt{15}-\sqrt{12}+\sqrt{5}-2}$; **b)** $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6}-2}{2+\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{6}}$;

c) $\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}}{\sqrt{14}+\sqrt{10}+\sqrt{8}}$; **d)** $\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}}$.

❑ **39.** Să se scrie sub formă mai simplă expresiile:

a) $\frac{4x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^4-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$;

b) $\left(\dfrac{\sqrt{x+1}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)^2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}-\dfrac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$, $x\neq 0,\ x\geq -1$;

c) $\dfrac{a\sqrt{2}+\sqrt{2ab}+\sqrt{3ab}+b\sqrt{3}-\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{2a}+\sqrt{3b}-1}$;

d) $\dfrac{a\sqrt{3}-\sqrt{3ab}+\sqrt{2ab}-b\sqrt{2}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}{1+\sqrt{2b}+\sqrt{3a}}$;

e) $\dfrac{2x+2\sqrt{6xy}-5\sqrt{2x}+3y-5\sqrt{3y}}{\sqrt{2x}-5+\sqrt{3y}}$.

❒ **40.** Să se calculeze sumele:

a) $S_1=1+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$;

b) $S_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$.

❒ **41.** Să se rezolve ecuația $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=20,\ n\in\mathbb{N}^*$.

❒ **42.** **a)** Să se arate că are loc egalitatea $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+k}{k\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)+1}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$ și $k\in\mathbb{R}\setminus\left\{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right\}$.

b) Să se calculeze suma:

$$S=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}+1}+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}+2}{2\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)+1}+\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n-2}+3}{3\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2}\right)+1}+\ldots+\frac{\sqrt{2}-1+n}{n\left(\sqrt{2}+1\right)+1}.$$

❒ **43.** Să se determine mulțimile:

$A=\left\{x\in\mathbb{Z}\ \middle|\ \sqrt{\dfrac{4x-5}{x+1}}\in\mathbb{N}\right\}$; $D=\left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ x=\sqrt{\dfrac{9}{4-n}},\ n\in\mathbb{N}\right\}\cap\mathbb{Q}$;

$B=\left\{x\in\mathbb{Q}\ \middle|\ x=\sqrt{\dfrac{5-n}{9}},\ n\in\mathbb{N}\right\}$; $E=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\cap\left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ x=\sqrt{\dfrac{16-3n}{4}},\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

$C=\left\{n\in\mathbb{N}\ \middle|\ \sqrt{\dfrac{2n+1}{n-3}}\in\mathbb{N}\right\}$;

❒ **44.** Să se determine $x\in\mathbb{Z}$ astfel încât numărul

$$\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{18+8\sqrt{2}}+\sqrt{28-10\sqrt{3}}}{x-2}\in\mathbb{Z}.$$

TESTE DE VERIFICARE

Testul nr. 1

(timp de lucru 40 de minute)

1. Determinați media aritmetică, media geometrică și media armonică a numerelor:

$$A = \frac{\sqrt{7}-1}{\left(\sqrt{7}+1\right)\left(8-2\sqrt{7}\right)} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\right);$$

$$B = \frac{\sqrt{16^2+12^2}+\sqrt{16^2-12^2}-\sqrt{16-12}}{18+2\sqrt{28}}.$$ *(3 p.)*

2. Să se demonstreze că oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, numărul:

$\left(2x^2-3\sqrt{2}x+1\right)\left(2x^2+9-\sqrt{18}x\right)+16$ este pătrat perfect. *(2 p.)*

3. Să se simplifice fracția $\dfrac{\left(4x^2+x-1\right)\left(4x^2+x-5\right)+4}{\left(4x^2+x-1\right)\left(4x^2+x\right)-6}$. *(2 p.)*

4. Să se determine mulțimea $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \sqrt{\dfrac{4x+7}{x+4}} \in \mathbb{N}\right\}$. *(2 p.)*

Testul nr. 2

(timp de lucru 40 de minute)

1. Fie numerele $a = \dfrac{\sqrt{8}+3}{2}$ și $b = \dfrac{3\sqrt{2}-4}{2\sqrt{2}}$. Să se arate că:

a) media aritmetică, media armonică și media geometrică a numerelor a și b nu sunt numere iraționale; *(1,5 p.)*

b) media ponderată, cu ponderile 3 și 5, a numerelor a și b este număr irațional. *(1,5 p.)*

2. Să se determine mulțimea $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \sqrt{x^2+8x+20} \in \mathbb{N}\right\}$. *(2 p.)*

3. Fie $a = \sqrt{3-\sqrt{8}}$ și $b = \sqrt{6-\sqrt{32}}$.

Calculați $a^{10}+a^9\cdot b+a^8\cdot b+\ldots+a^2b-2b+1$. *(3 p.)*

4. Fie x, y, z numere reale strict pozitive. Dacă $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{z^2}+\dfrac{z^2}{x^2}=\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}$, să se arate că $x=y=z$. *(1 p.)*

1.2. ORDONAREA NUMERELOR REALE

45. Dacă a și b sunt numere reale pozitive, să se arate că:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

46. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a} \le \frac{a+b+c}{2}.$$

47. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, să se demonstreze că:

a) $(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc$;

b) $a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2)+c(a^2+b^2) \ge 6abc$;

c) $2(a^3+b^3+c^3) \ge (a+b)ab+(b+c)bc+(a+c)ac$;

d) $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc \ge 0$;

e) $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+ac+bc)$;

f) $a^3+b^3+c^3 \ge 3abc$;

g) $a^4+b^4+10a^2b^2 \ge 8a^3b+8ab^3-8a^2b^2$;

h) $8ab(1-ab) \le (1+a^2)(1+b^2)$;

i) $(a+b)^4 \le 8(a^4+b^4)$;

j) $a^3+b^3+27 \ge 9ab$.

48. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, să se arate că:

a) $\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c} \ge 6$;

b) $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \ge \frac{1}{3}(a+b+c)^2$;

c) dacă $a^2+b^2+c^2=1$, atunci $-\frac{1}{2} \le ab+ac+bc \le 1$.

49. Dacă $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt numere reale pozitive cu suma egală cu 1, să se arate că:

a) $\sqrt{x_1(x_2+x_3+...+x_n)}+\sqrt{x_2(x_1+x_3+...+x_n)}+...+$
$+\sqrt{x_n(x_1+x_2+...+x_{n-1})} \le \frac{n}{2}$.

b) $\frac{x_1x_2}{x_1+x_2}+\frac{x_2x_3}{x_2+x_3}+...+\frac{x_nx_1}{x_n+x_1} < \frac{1}{2}$;

c) $\sqrt{\frac{x_2+x_3+\ldots+x_n}{x_1}}+\sqrt{\frac{x_1+x_3+\ldots+x_n}{x_2}}+\ldots+\sqrt{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{x_n}}<$

$<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right).$

❑ **50.** Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt numere reale pozitive, să se arate că:

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+\ldots+\sqrt{a_1a_n}+\sqrt{a_2a_3}+\ldots+\sqrt{a_{n-1}a_n}\le\frac{n-1}{2}(a_1+a_2+\ldots+a_n).$$

❑ **51.** Să se demonstreze că dacă a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC, atunci:

a) $b(a^2+c^2)+c(a^2+b^2)+a(b^2+c^2)>a^3+b^3+c^3$;

b) $a^2<2(b^2+c^2)$;

c) $m(\widehat{A})=90^\circ$ dacă și numai dacă $\sqrt{2(a+b)}=\sqrt{a+c}+\sqrt{a-c}$.

❑ **52.** Să se demonstreze că:

$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}\ge\sqrt{2}(a+b+c)$, oricare ar fi $a, b, c>0$.

❑ **53.** Să se demonstreze că oricare ar fi $a\ge1$ are loc inegalitatea:

$\frac{1}{\sqrt{a}}>2\sqrt{a+1}-2\sqrt{a}$.

❑ **54.** Fie a, b, c numere reale pozitive. Să se arate că:

a) dacă $a+b+c=1$, atunci $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge9$;

b) dacă $a+b+c=1$, atunci $ab+bc+ca\le\frac{1}{3}$ și $abc\le\frac{1}{27}$;

c) dacă $abc=1$, atunci $a+b+c\ge3$.

❑ **55.** Să se demonstreze că:

a) $\sqrt{25x^2-20x+20}+\sqrt{y^2-6\sqrt{2}y+19}>5,\ \forall\ x, y\in\mathbb{R}$;

b) $\sqrt{4x^2+8x+85}+\sqrt{5x^2+10x+69}+\sqrt{6x^2+12x+55}\ge18,\ \forall\ x\in\mathbb{R}$;

c) $\sqrt{x^2+4x+31}+\sqrt{4y^4+8y^2+29}+\sqrt{9z^2+12z+53}>15,\ \forall\ x, y, z\in\mathbb{R}$.

❑ **56.** Fie x, y, z numere reale pozitive astfel încât $x+y+z=xyz$. Să se arate că $36\le4(xy+yz+zx)\le4xy+x^2y^2z^2$.

❑ **57.** Să se demonstreze că:

$\sqrt{x(y+z)}+\sqrt{y(x+z)}+\sqrt{z(x+y)}\le\sqrt{2}(x+y+z),\ \forall\ x, y, z\in(0, +\infty)$.

❑ **58.** Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive, să se arate că:
$x(y+1)+y(z+1)+z(x+1) \geq 6\sqrt{xyz}$.

❑ **59.** Dacă x este număr real pozitiv, să se demonstreze că:

a) $\sqrt{x} \leq \dfrac{1+x}{2}$; **b)** $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} \leq \dfrac{1}{2x}$.

❑ **60.** Dacă a, b, c sunt numere reale astfel încât $a+b+c=1$, atunci:
$\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+2}+\sqrt{3c+3} \leq 6$.

❑ **61.** Dacă a, b, c, d sunt numere pozitive astfel încât $a+b+c+d=1$, să se arate că $\sqrt{8a+1}+\sqrt{8b+1}+\sqrt{8c+1}+\sqrt{8d+1}<8$.

❑ **62.** Să se arate că:

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}+\dfrac{\sqrt{6}}{5}+\dfrac{\sqrt{12}}{7}+\dfrac{\sqrt{20}}{9}+\dfrac{\sqrt{30}}{11}+\dfrac{\sqrt{42}}{13}<3$;

b) $\dfrac{\sqrt{6}}{5}+\dfrac{\sqrt{20}}{9}+\dfrac{\sqrt{42}}{13}+\ldots+\dfrac{\sqrt{2n(2n+1)}}{4n+1}<\dfrac{n}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

❑ **63.** Se consideră numerele pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cu produsul egal cu 1. Să se demonstreze că: $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geq 2^n$.

❑ **64.** Se consideră numerele reale pozitive a și b. Să se demonstreze inegalitatea: $\left(1+\dfrac{a}{b}\right)^n+\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

❑ **65.** Să se demonstreze că pentru $\forall\, a \in \mathbb{R}$ are loc relația: $\dfrac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2$.

❑ **66.** Fie $x, y, z, t \in (0, +\infty)$.

Să se arate că $\dfrac{x}{x+z+t}+\dfrac{y}{x+y+t}+\dfrac{z}{x+y+z}+\dfrac{t}{y+z+t}$ nu este număr natural.

❑ **67.** Să se compare numerele reale a, b, c știind că $a=2$, $b=3x-1$, $c=5-x$, iar $x \in \mathbb{R}$.

❑ **68.** Să se determine numerele $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ știind că este verificată inegalitatea $xyz+x+y+z \leq xy+xz+yz+1$.

❑ **69.** Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC care verifică relația: $\sqrt{a^2-12a+40}+\sqrt{b^2-6\sqrt{3}b+28}+\sqrt{c^2-6c+25} \leq 7$. Să se determine lungimile laturilor triunghiului și măsurile unghiurilor acestuia.