

# MATEMATICĂ

clasa a IX-a

- ALGEBRĂ
- GEOMETRIE  
TRIGONOMETRIE

## ELEMENTE DE ALGEBRĂ

<b>Capitolul I – MULTIMI ȘI ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ</b> .....	5
1. Mulțimea numerelor reale .....	5
1.1. Operații algebrice cu numere reale .....	6
1.2. Ordonarea numerelor reale .....	15
1.3. Modulul unui număr real .....	19
1.4. Aproximări prin lipsă, aproximări prin adaos .....	24
1.5. Parte întreagă, Parte fracționară .....	26
1.6. Operații cu intervale de numere reale .....	31
2. Propoziție, Predicat, Cuantificatori .....	36
3. Operații logice elementare corelate cu operații și relații cu mulțimi .....	43
3.1. Operații logice elementare cu propoziții Formule de calcul prepozițional .....	43
3.2. Operații logice elementare cu predicate Operații și relații cu mulțimi .....	46
3.3. Reguli de negare a propozițiilor universale și a propozițiilor existențiale Condiții necesare, Condiții suficiente .....	50
4. Tipuri de raționamente logice .....	54
4.1. Metoda inducției matematice .....	54
4.2. Probleme de numărare .....	61
<b>Capitolul II – FUNCȚII</b> .....	65
1. Șiruri de numere reale .....	65
1.1. Noțiunea de șir de numere reale .....	65
1.2. Șiruri mărginite .....	68
1.3. Șiruri monotone .....	70
2. Tipuri de șiruri .....	74
2.1. Progresii aritmetice .....	74
2.2. Progresii geometrice .....	77
2.3. Aplicații .....	80
3. Funcții, Lecturi grafice .....	89
3.1. Reper cartezian. Produs cartezian Drepte în plan de forma $x = m$ sau $y = m$ , $m \in \mathbb{R}$ .....	89
3.2. Noțiunea de funcție .....	93
3.3. Imaginea și preimaginea unei mulțimi printr-o funcție. Graficul funcției Restricții ale unei funcții .....	98
3.4. Funcții numerice .....	101
4. Proprietăți generale ale funcțiilor .....	103
4.1. Funcții mărginite .....	103
4.2. Funcții pare, Funcții impare .....	105
4.3. Funcții periodice .....	108
4.4. Funcții monotone .....	111
5. Compunerea funcțiilor .....	114
<b>Capitolul III – FUNCȚIA DE GRADUL I</b> .....	119
1. Definiția funcției de gradul I Reprezentare grafică .....	119
2. Monotonia funcției de gradul I .....	124
3. Semnul funcției de gradul I Inecuații de gradul I .....	126
4. Poziții relative a două drepte Sisteme de ecuații liniare .....	129
5. Sisteme de inecuații de gradul I .....	130
<b>Capitolul IV – FUNCȚIA DE GRADUL AL DOILEA</b> .....	133
1. Definiția funcției de gradul al doilea Reprezentare grafică .....	135

2. Relațiile lui Viète .....	140
3. Monotonia funcției de gradul al doilea .....	144
4. Semnul funcției de gradul al doilea Inecuații de gradul al doilea .....	145
5. Poziția relativă a unei drepte față de o parabolă .....	150
6. Poziția relativă a două parabole .....	153

## Capitolul V – PROBLEME RECAPITULATIVE DE ALGEBRĂ .....

156

## ELEMENTE DE GEOMETRIE

<b>Capitolul I – VECTORI ÎN PLAN</b> .....	168
1. Segmente orientate, Relația de echipolență .....	168
2. Operații cu vectori .....	170
2.1. Suma și diferența vectorilor .....	170
2.2. Înmulțirea cu scalari a vectorilor .....	177
3. Descompunerea unui vector după doi vectori necoliniari .....	184
4. Reper cartezian .....	185
4.1. Coordonatele unui vector .....	185
4.2. Distanța dintre două puncte .....	190

## Capitolul II – COLINIARITATE, CONCURENȚA PARALELISM .....

194

1. Vectorul de poziție al unui punct în plan .....	194
2. Centre de greutate .....	200
3. Teorema bisectoarelor Relația lui Sylvestor .....	204
4. Teorema lui Menelau .....	211

## Capitolul III – ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE

214

1. Unghiuri și arce Măsura unghiurilor și a arcelor .....	214
2. Generalizarea noțiunii de unghi .....	215
3. Funcții trigonometrice .....	216
3.1. Formulele trigonometrice în triunghiul dreptunghic .....	218
3.2. Semnul funcțiilor trigonometrice .....	221
3.3. Formule de reducere la primul cadran .....	221
3.4. Paritate, Imparitate, Periodicitate .....	223
4. Relații între funcțiile trigonometrice ale aceluiași unghi .....	225
5. Funcțiile trigonometrice ale unei sume și ale unei diferențe de unghiuri .....	230
6. Transformarea sumelor în produs și a produselor în sume .....	235
7. Sume și produse trigonometrice .....	239

## Capitolul IV – APLICAȚII ALE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIA PLANĂ .....

242

1. Produsul scalar a doi vectori .....	242
2. Teorema cosinusului Teorema sinusurilor .....	246
3. Aplicații vectoriale în geometria plană .....	248
4. Aplicații trigonometrice în geometria plană .....	251
4.1. Rezolvarea triunghiurilor .....	252
4.2. Raza cercului înscris și raza cercului circumscris unui triunghi .....	254
4.3. Formule pentru aria triunghiului .....	255

## Capitolul V – PROBLEME RECAPITULATIVE DE GEOMETRIE .....

259

<b>INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI</b> .....	264
--------------------------------------	-----

# ELEMENTE DE ALGEBRĂ

## I. MULȚIMI ȘI ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

### 1 MULȚIMEA NUMERELOR REALE

#### Noțiuni teoretice

Mulțimi remarcabile de numere reale:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ ; (mulțimea numerelor **naturale**).
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ ; (mulțimea numerelor **întregi**).
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{x}{y} \mid x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0 \right\}$ ; (mulțimea numerelor **raționale**).
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  = mulțimea numerelor **iraționale**.
- $\mathbb{R}$  = mulțimea numerelor **reale**.

Au loc relațiile:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ;  $\mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ ;  $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$ .

#### Adunarea numerelor reale

Este operația algebrică care asociază oricărei perechi  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  un unic număr real notat  $x + y$ , numit suma numerelor  $x, y$ .

#### Proprietăți:

Pentru oricare numere reale  $x, y, z$  au loc proprietățile:

1.  $x + y = y + x$ , (comutativitatea)
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$ , (asociativitatea)
3.  $x + 0 = 0 + x = x$ , (0 este element neutru pentru adunare)
4.  $x + (-x) = (-x) + x = 0$ , (orice număr real  $x$  are opus numărul  $-x$ ).

#### Înmulțirea numerelor reale

Este operația algebrică care asociază oricărei perechi  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  un unic număr real notat  $x \cdot y$  sau  $xy$ , numit produsul lui  $x$  cu  $y$ .

#### Proprietăți:

Pentru oricare numere reale  $x, y, z$  au loc proprietățile:

1.  $xy = yx$ , (comutativitatea)
2.  $(xy)z = x(yz)$ , (asociativitatea)
3.  $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ , (1 este element neutru pentru înmulțire)



**b)**  $(\sqrt{3})^5 : (-\sqrt{3^3}) - 3 \cdot \sqrt{0, (3)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-3}$ ;

**c)**  $\left[ \sqrt{6561} \cdot \frac{-3,4(1)}{-27,(9)} - \left(\frac{4}{3}\right)^{-2} \cdot 0,(4) \right] \cdot \left(\frac{-6}{\sqrt{7}}\right)^2 \cdot \frac{1}{10}$ ;

**d)**  $\frac{1}{\sqrt{10^4}} - \sqrt{9,61} : (3,1)^{-1} + \sqrt{0,0576} \cdot (0,2)^{-2}$ ;

**e)**  $[-1,2(5) + 0,1(4)] \cdot [12 - 1,1(5) - 1,8(4)]$ .

□3. Să se efectueze:

**a)**  $\frac{2}{3} + \frac{\left(1\frac{7}{18} \cdot \frac{8}{75} + \frac{15}{8} \cdot \frac{32}{45}\right) : 2\frac{2}{3}}{2\frac{4}{5} \left(\frac{20}{63} \cdot 2\frac{7}{10} - \frac{25}{28} : 1\frac{1}{14}\right)}$ ;

**b)**  $0,1(2) \cdot \left[ 99 + \frac{\frac{3}{4} - 0,25}{\frac{1}{6} + \frac{1}{2}} : 0,75 - 3\frac{1}{4} : \left(0,225 + \frac{1}{10}\right) \right]$ ;

**c)**  $\left[ (5 + 2\sqrt{6})^4 + \frac{1}{(5 - 2\sqrt{6})^4} \right] \cdot \frac{(40 - 16\sqrt{6})^4}{1024}$ ;

**d)**  $\frac{\left(-\frac{3}{7}\right) \cdot \frac{14}{11} : \frac{33}{484} - (-2^3) - \left[-\frac{1}{0,(6)}\right]^2 : 2\frac{1}{4}}{\left(\frac{13}{10} - 5,2\right) + [0,5(3) - 2,(3)] - \left(-7\frac{1}{2} + 5\frac{3}{4}\right) + 1,95}$ .

□4. Să se arate că următoarele numere sunt inverse unul altuia:

$$x = \left[ \left( \frac{7}{45} + \frac{11}{30} - \frac{5}{12} \right) : 1,0(5) - 0,05 \right] : \frac{1}{40},$$

$$y = \left\{ 0,8(3) + [0,1(6) - 0,(4) + 0,08(3)] : \frac{7}{3} \right\} \cdot \frac{7}{20} + \frac{19}{80}.$$

□5. Se dau numerele reale  $a = 5 - 2\sqrt{6}$  și  $b = 2\sqrt{6} + 5$ . Să se arate că cele două numere sunt inverse unul altuia și că  $\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{b - a + 3\sqrt{ab + 5}}{\sqrt{3}}$ .

□6. Se dau numerele reale:

$$A = \left| 2\frac{3}{10} - 15\frac{1}{5} \right| : (-0,86) \cdot 0,0(6) \text{ și } B = \frac{1,6(1) - 3,3(8) - 1,(2)}{6 : 6\frac{2}{3} - 6\frac{3}{5} \cdot 1\frac{3}{22} - \frac{2}{5}} - 1,(428571).$$

Să se calculeze:

a)  $A - B$ ;  $A + 7B$ ;  $\frac{A^2 + B^2}{3A - B}$ ;

b) suma inverselor numerelor  $A$  și  $B$ ;

c) suma opuselor numerelor  $A$  și  $B$ .

□ 7. Dacă  $\frac{a}{3} - \frac{b}{8} + \frac{c}{11} = 0,91$ , să se calculeze valoarea expresiei:

$$E = \frac{c}{22} \cdot \frac{200}{91} + \frac{b}{8} \cdot \frac{100}{-91} - \left(-\frac{100}{91}\right) \cdot \frac{a}{3} - 1.$$

□ 8. Dacă  $a^2 + b^2 - 2a - 4b + 5 = 0$ , să se calculeze  $a^{2005} + (b - a)^{2005}$ .

□ 9. a) Dacă  $4x^2 + 9y^2 = 256$  și  $2x + 3y = 20$ , să se calculeze  $xy$ ,  $2x - 3y$ ,  $x$  și  $y$ .

b) Dacă  $3a - 5b = 8$  și  $9a^2 + 25b^2 = 160$ , să se calculeze  $ab$ ,  $3a + 5b$ ,  $a$ ,  $b$ .

□ 10. Fie  $a$  și  $b$  numere reale cu proprietatea că  $a + b = 10$  și  $ab = 15$ . Să se calculeze:

a)  $a^2 + b^2$ ,  $a^3 + b^3$ ,  $a^4 + b^4$ ,  $a^6 + b^6$ ;

b)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ,  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ ,  $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}$ ,  $\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4}$ ,  $\frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5}$ .

□ 11. Să se determine numerele reale  $a$  și  $b$ , respectiv  $x$  și  $y$  dacă:

a)  $2a^2 + 25b^2 + 5(2a + 5) - 10ab = 0$ ;

b)  $5x^2 + 9y^2 - 6x(2 - y) + 9 = 0$ .

□ 12. Să se verifice dacă raportul  $r = \frac{24a - 9b}{14a - 12,9b}$  este pătratul unui număr

real știind că  $\frac{2a}{7b} = 3 \cdot 10^{-1}$ .

□ 13. Știind că  $\frac{a}{b} = 2, (6)$ , să se stabilească dacă raportul  $r = \frac{7a + 2, (6)b}{5a - 13b}$  este cubul unui număr real.

□ 14. Să se stabilească valoarea de adevăr a următoarelor relații:

a)  $a(b + c)(b + c - a) + b(a + c)(a + c - b) + c(a + b)(a + b - c) = 6abc$ ;

b)  $[4ab - (a^2 + 1)(b^2 + 1)]^2 - (a^2 - 1)^2(b^2 - 1)^2 = 4(a - b)^2(1 - ab)^2$ ;

c)  $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + 3(a + b + c)(ab + bc + ca)$ ;

d)  $(a + b + c)^3 - (-a + b + c)^3 - (a - b + c)^3 - (a + b - c)^3 = 24abc$ ;

e)  $\frac{1}{1 + a + 2a^2 + a^3 + a^4} + \frac{1}{a^4 - a^3 + 2a^2 - a + 1} \geq \frac{2}{a^4 + a^2 + 1}$ ;

$$f) \left( \frac{a+b}{1-ab} - \frac{a-b}{1+ab} \right) : \left( 1 + \frac{a^2 - b^2}{1 - a^2 b^2} \right) = \frac{2b}{b^2 - 1};$$

$$g) \left[ \left( \frac{a+1}{a-1} \right)^3 - 1 + 3 \left( \frac{a+1}{a-1} \right) - 3 \left( \frac{a+1}{a-1} \right)^2 \right] : \left[ 1 - \left( \frac{a-1}{a+1} \right)^3 + 3 \left( \frac{a-1}{a+1} \right) \left( \frac{a-1}{a+1} - 1 \right) \right] = \left( \frac{a+1}{a-1} \right)^3;$$

$$h) \frac{a+2}{a-2} : \left( \frac{6a}{a^3-8} + \frac{2a}{a^2+2a+4} + \frac{1}{2-a} \right) - \frac{4a+4}{a-2} \leq a.$$

□ 15. Să se efectueze operațiile cu puteri cu exponent întreg:

$$a) 4^2 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{15} \cdot \left( \frac{1}{8} \right)^{\sqrt{81}} \cdot 16^5;$$

$$b) \frac{12^{-4}}{(4^2)^3} \cdot \frac{(2^3)^8}{6^3} \cdot (1,5)^5;$$

$$c) \left[ 3 \cdot 5^2 - 3(4 + 3^2 - 1^5) \right]^3 \cdot (4 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2^2)^4 : 15^{2^0};$$

$$d) 5^{18} \cdot 5^{-6} + 6^{203} \cdot 36^{-100} - 4 \cdot (2^2)^5 : \left\{ 5^4 \cdot (5^3)^2 \cdot 25 + (6^{50})^2 \cdot [(3 \cdot 2)^{33}]^{-3} \cdot (2 \cdot 3)^2 - 2^9 \cdot 8 \right\};$$

$$e) \left( -\frac{4}{5} \right)^{-2} \cdot \left[ \left( -\frac{5}{6} \right)^3 \right]^{15} : \frac{125^3}{24^3} : \left[ \left( \frac{36}{25} \right)^{10} \right]^{-2} - \left( \frac{25}{48} \right)^2 : \left( -\frac{5}{4} \right)^{-2} : \left( -\frac{15}{32} \right)^3 \cdot \frac{(-5)^{-2} \cdot [(-2)^2]^{-2}}{(-3)^{-3}}.$$

□ 16. Să se efectueze:

$$a) \frac{a^{-2} - 9b^{-2}}{a^{-2} - b^{-2}} \cdot \frac{a^{-1} - b^{-1}}{3b^{-1} + a^{-1}};$$

$$b) \frac{a^{-3} + b^{-3}}{a^{-1} - b^{-1}} \cdot \frac{a - b}{a^{-2} - a^{-1}b^{-1} + b^{-2}};$$

$$c) \left[ a - (2 - a)^{-1} \right]^{-1} : \left[ \frac{a(a-2) + a^0}{a^0 - (a - a^0)} \right]^{-1};$$

$$d) \left[ \left( a^2 - \frac{1}{b^2} \right)^a \cdot \left( b + \frac{1}{a} \right)^{b-a} \right] : \left[ \left( b^2 - \frac{1}{a^2} \right)^b \cdot \left( a - \frac{1}{b} \right)^{a-b} \right].$$

□ 17. Să se scrie sub formă mai simplă expresiile:

$$\text{a) } \left[ \frac{(2a^{-1}x^{-n})^2}{by^{-1}} \right]^{-2} \cdot \left[ \frac{a^2x^n}{4(b^{-1}y^2)^2} \right]^{-2};$$

$$\text{b) } a^3(a^n)^n \cdot \left( \frac{a}{a^n} \right)^{-n} - \frac{a^{7n} \cdot (a^4)^n}{a^5} - \frac{1}{a^{n+1}} \cdot (a^{n^2+4} - a^{6n}) \cdot (a^{6n-4} + a^{n^2}).$$

□ 18. a) Să se scrie sub formă mai simplă expresia:

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)\dots(a^{2^n}+b^{2^n}).$$

b) Fie  $A = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{a^2}\right)\left(1 + \frac{1}{a^4}\right)\dots\left(1 + \frac{1}{a^{2^n}}\right)$ . Pentru  $a=2$ , să se arate

că  $A < 2$ .

□ 19. Care sunt valorile posibile ale expresiilor:

$$\text{a) } E_1 = (-1)^{k+1} \left(-\frac{2}{3}\right) - (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{3} + (-1)^{k+2}, k \in \mathbb{N};$$

$$\text{b) } E_2 = -\frac{2}{5}(-1)^{n^2+n} + \frac{1}{2}(-1)^{n+2} + \frac{(-1)^{2m+3}}{10}, m, n \in \mathbb{N};$$

$$\text{c) } E_3 = -\frac{3}{4}(-1)^{m+5} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}(-1)^{n+2} - \frac{7}{2}(-1)^{2p+3} + \frac{1}{2} \cdot (-1)^{q^2+q+5}, m, n, p, q \in \mathbb{N}?$$

□ 20. Care este valoarea maximă a expresiei:

$$E = \frac{5}{2}(-1)^{2m+n+1} - \left(-\frac{2}{5}\right)(-1)^{m+2n} - \frac{3}{4}(-1)^{n+1} - 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) \cdot (-1)^{m+1}, m, n \in \mathbb{N}?$$

□ 21. Dacă  $2a(a-5) + 2b(b-1) + 13 = 0$  să se calculeze:

$$(a-1)^{2005} + (a-8b)^{2005}.$$

□ 22. Să se calculeze folosind operațiile cu radicali:

$$\text{a) } (\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{32} - \sqrt{200}) - \left( \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{27} \right);$$

$$\text{b) } (\sqrt{75} + \sqrt{21} + \sqrt{1}) \cdot (1 + \sqrt{12});$$

$$\text{c) } (2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2})(\sqrt{72} - 5\sqrt{20} - 2\sqrt{2});$$

$$\text{d) } \sqrt{2} + \sqrt{2^2} + \sqrt{2^3} + \dots + \sqrt{2^{2005}}.$$

□ 23. Să se determine media aritmetică, media geometrică și media armonică a numerelor  $a$  și  $b$ , știind că:

$$\text{a) } a = \sqrt{98} + \sqrt{32} - \sqrt{50}, b = \sqrt{162} + \sqrt{18} - \sqrt{72};$$

$$\text{b) } a = 3\sqrt{128} + \sqrt{200} - 2\sqrt{242}, b = \sqrt{32} - \sqrt{288} + 2\sqrt{450};$$

$$c) a = \frac{\sqrt{16^2 + 12^2} + \sqrt{16^2 - 12^2} - \sqrt{16 - 12}}{18 + 2\sqrt{28}}$$

$$b = \left[ \frac{1}{48} : \sqrt{\frac{25}{256}} + \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \cdot \sqrt{20,25 - 1} \right] : \sqrt{0,32(1)};$$

$$d) a = \sqrt{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{7 - 2\sqrt{6}}} + 2\sqrt{5} + 5, b = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{\sqrt{4} + 5} - 2\sqrt{5}.$$

□ 24. Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor:

$$p_1 : \sqrt{5n + 2} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N};$$

$$p_2 : \sqrt{2 + 2 \cdot 3^n + 9^n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N};$$

$$p_3 : \sqrt{4 - \sqrt{15}} \cdot (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6}) \in \mathbb{N};$$

$$p_4 : (\sqrt{5} - 2)^{-1} \cdot \frac{5 - 2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - \left[ (\sqrt{4 + \sqrt{7}})^{-1} - (\sqrt{4 - \sqrt{7}})^{-1} \right]^2 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}.$$

□ 25. Să se arate că expresia  $\left[ \sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{(2 + \sqrt{3})^{-1}} \right]^2 + \left[ \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{(7 + 4\sqrt{3})^{-1}} \right]^2$  nu este număr irațional.

□ 26. Dacă  $x$  este partea întregă a numărului  $-24,71$  și  $x - 8y = 7$ , să se calculeze  $\sqrt{(x - 7)^2 - 15y^2} + \sqrt{(x + 25)^2 - 15(y^3 + 64)}$ .

□ 27. Să se arate că următoarea expresie nu depinde de  $x$ :

$$E(x) = x\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{16 - x^2} + 8}{\sqrt{\sqrt{16 - x^2} + 4}} - \sqrt{(x + 4)^3} + \sqrt{(4 - x)^3}, x \in [-4, 4].$$

□ 28. Să se arate că dacă  $x \in [-1, 1]$ ,  $y \in [-3, 4]$ , atunci expresia

$\sqrt{(x + y - 5)^2} + \sqrt{(2x + y + 5)^2} - \sqrt{(x - y - 4)^2} + \sqrt{(2x - y - 5)^2}$  nu depinde de  $x$  și  $y$ .

□ 29. Să se scrie ca sumă algebrică de doi radicali simpli:  $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ ;  $\sqrt{5 - \sqrt{21}}$ ;  $\sqrt{17 + 12\sqrt{2}}$ ;  $\sqrt{5 - \sqrt{24}}$ ;  $\sqrt{3 + 2x\sqrt{3 - x^2}}$ ,  $x \in [0, \sqrt{3}]$ ;  $\sqrt{8a - 2\sqrt{16a^2 - 9}}$ ,  $a > \frac{3}{4}$ .

□ 30. Să se arate că numerele  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sunt raționale dacă:

$$A = \sqrt{13 - 30\sqrt{2 - \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}}} + \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}};$$

$$B = \sqrt{26 + 6\sqrt{13 - 4\sqrt{8 + 2\sqrt{6} - \sqrt{20}}}} + \sqrt{26 - 6\sqrt{13 + 4\sqrt{8 - 2\sqrt{6} + \sqrt{20}}}};$$

$$C = \sqrt{25 + 4\sqrt{8 - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{5}}} - \sqrt{25 - 4\sqrt{8 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{5}}}.$$

□ 31. Să se arate că  $\frac{2a-b}{2b+a} \in \mathbb{Q}$  știind că:

$$a = \sqrt{3 - \sqrt{5}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} \quad \text{și} \quad b = \sqrt{\sqrt{7} - 1} - \sqrt{11 - 4\sqrt{7}}.$$

□ 32. Se consideră numerele  $a = \sqrt{28 - 16\sqrt{3}}$  și  $b = \sqrt{3 + \sqrt{3}} - \sqrt{13 + \sqrt{48}}$ .

$$\text{Să se arate că } \left( \frac{b^2 - a}{a + \sqrt{8b}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \in \mathbb{Q}.$$

□ 33. Să se arate că dacă  $a = \sqrt{4 + \sqrt{11}} + \sqrt{23 - 2\sqrt{132}}$  și  $b = \sqrt{\sqrt{97 + 56\sqrt{3}}}$ , atunci  $\frac{b^2 - 4a}{b - a} \in \mathbb{N}$ .

□ 34. Dacă  $a = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$ , să se calculeze  $(a + 2\sqrt{3})^{2004}$ .

□ 35. Dacă  $n = \sqrt{5 + \sqrt{24}} - \sqrt{8} - \sqrt{5 - \sqrt{24}}$ , să se calculeze  $n^{2004}$ .

□ 36. Dacă  $\frac{3a-4b}{a+2b} = \sqrt{\frac{6,4(4) - 0,2(7) + 2,8(3)}{2,6(6) + 4,(4)}}$ , să se calculeze 27% din numărul  $\frac{20a}{b}$ .

□ 37. Să se raționalizeze numitorii fracțiilor:

a)  $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ;

b)  $\frac{1}{\sqrt{4 - \sqrt{7}}}$ ;

c)  $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ ;

d)  $\frac{1}{2\sqrt{3} - \sqrt{10}}$ ;

e)  $\frac{1}{6\sqrt{2} - 9}$ ;

f)  $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1}$ ;

g)  $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}}$ ;

h)  $\frac{1}{2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}}$ ;

i)  $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1}$ .

□ 38. Să se scrie sub formă mai simplă expresiile:

a)  $\frac{\sqrt{15} + \sqrt{12} + \sqrt{5} + 2}{\sqrt{15} - \sqrt{12} + \sqrt{5} - 2}$ ;

b)  $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{6} - 2}{2 + \sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{6}}$ ;

c)  $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{4} + \sqrt{7}}{\sqrt{14} + \sqrt{10} + \sqrt{8}}$ ;

d)  $\frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}$ .

□ 39. Să se scrie sub formă mai simplă expresiile:

a)  $\frac{4x(x + \sqrt{x^2 - 1})^2}{(x + \sqrt{x^2 - 1})^4 - 1}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ ;

$$b) \left( \frac{\sqrt{x+1}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right)^2 \cdot \left( \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} - \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{x}, \quad x \neq 0, x \geq -1;$$

$$c) \frac{a\sqrt{2} + \sqrt{2ab} + \sqrt{3ab} + b\sqrt{3} - \sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{2a} + \sqrt{3b} - 1};$$

$$d) \frac{a\sqrt{3} - \sqrt{3ab} + \sqrt{2ab} - b\sqrt{2} + \sqrt{a} - \sqrt{b}}{1 + \sqrt{2b} + \sqrt{3a}};$$

$$e) \frac{2x + 2\sqrt{6xy} - 5\sqrt{2x} + 3y - 5\sqrt{3y}}{\sqrt{2x} - 5 + \sqrt{3y}}.$$

□ 40. Să se calculeze sumele:

$$a) S_1 = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}};$$

$$b) S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}.$$

□ 41. Să se rezolve ecuația  $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = 20, n \in \mathbf{N}^*$ .

□ 42. a) Să se arate că are loc egalitatea  $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+k}{k(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},$

oricare ar fi  $n \in \mathbf{N}$  și  $k \in \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\}.$

b) Să se calculeze suma:

$$S = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}+1} + \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}+2}{2(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})+1} + \frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n-2}+3}{3(\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2})+1} + \dots + \frac{\sqrt{2}-1+n}{n(\sqrt{2}+1)+1}.$$

□ 43. Să se determine mulțimile:

$$A = \left\{ x \in \mathbf{Z} \mid \sqrt{\frac{4x-5}{x+1}} \in \mathbf{N} \right\}; \quad D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \sqrt{\frac{9}{4-n}}, n \in \mathbf{N} \right\} \cap \mathbb{Q};$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x = \sqrt{\frac{5-n}{9}}, n \in \mathbf{N} \right\}; \quad E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \sqrt{\frac{16-3n}{4}}, n \in \mathbf{N} \right\}.$$

$$C = \left\{ n \in \mathbf{N} \mid \sqrt{\frac{2n+1}{n-3}} \in \mathbf{N} \right\};$$

□ 44. Să se determine  $x \in \mathbf{Z}$  astfel încât numărul

$$\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{18+8\sqrt{2}} + \sqrt{28-10\sqrt{3}}}{x-2} \in \mathbf{Z}.$$

**Testul nr. 1**

( *timp de lucru 40 de minute*)

- 1. Determinați media aritmetică, media geometrică și media armonică a numerelor:

$$A = \frac{\sqrt{7} - 1}{(\sqrt{7} + 1)(8 - 2\sqrt{7})} \cdot \left( \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \right);$$

$$B = \frac{\sqrt{16^2 + 12^2} + \sqrt{16^2 - 12^2} - \sqrt{16 - 12}}{18 + 2\sqrt{28}}. \quad (3 \text{ p.})$$

- 2. Să se demonstreze că oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ , numărul:

$$(2x^2 - 3\sqrt{2}x + 1)(2x^2 + 9 - \sqrt{18}x) + 16 \text{ este pătrat perfect.} \quad (2 \text{ p.})$$

- 3. Să se simplifice fracția  $\frac{(4x^2 + x - 1)(4x^2 + x - 5) + 4}{(4x^2 + x - 1)(4x^2 + x) - 6}$ . (2 p.)

- 4. Să se determine mulțimea  $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{\frac{4x+7}{x+4}} \in \mathbb{N} \right\}$ . (2 p.)

**Testul nr. 2**

( *timp de lucru 40 de minute*)

- 1. Fie numerele  $a = \frac{\sqrt{8} + 3}{2}$  și  $b = \frac{3\sqrt{2} - 4}{2\sqrt{2}}$ . Să se arate că:

**a)** media aritmetică, media armonică și media geometrică a numerelor  $a$  și  $b$  nu sunt numere iraționale; (1,5 p.)

**b)** media ponderată, cu ponderile 3 și 5, a numerelor  $a$  și  $b$  este număr irațional. (1,5 p.)

- 2. Să se determine mulțimea  $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x^2 + 8x + 20} \in \mathbb{N} \right\}$ . (2 p.)

- 3. Fie  $a = \sqrt{3 - \sqrt{8}}$  și  $b = \sqrt{6 - \sqrt{32}}$ .

Calculați  $a^{10} + a^9 \cdot b + a^8 \cdot b + \dots + a^2 b - 2b + 1$ . (3 p.)

- 4. Fie  $x, y, z$  numere reale strict pozitive. Dacă  $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} = \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y}$ , să

se arate că  $x = y = z$ . (1 p.)

## 1.2. ORDONAREA NUMERELOR REALE

□ 45. Dacă  $a$  și  $b$  sunt numere reale pozitive, să se arate că:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

□ 46. Dacă  $a, b, c$  sunt numere reale pozitive, să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}.$$

□ 47. Dacă  $a, b, c$  sunt numere reale pozitive, să se demonstreze că:

a)  $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ ;

b)  $a(b^2 + c^2) + b(a^2 + c^2) + c(a^2 + b^2) \geq 6abc$ ;

c)  $2(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a+b)ab + (b+c)bc + (a+c)ac$ ;

d)  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \geq 0$ ;

e)  $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+ac+bc)$ ;

f)  $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ ;

g)  $a^4 + b^4 + 10a^2b^2 \geq 8a^3b + 8ab^3 - 8a^2b^2$ ;

h)  $8ab(1-ab) \leq (1+a^2)(1+b^2)$ ;

i)  $(a+b)^4 \leq 8(a^4 + b^4)$ ;

j)  $a^3 + b^3 + 27 \geq 9ab$ .

□ 48. Dacă  $a, b, c$  sunt numere reale pozitive, să se arate că:

a)  $\frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6$ ;

b)  $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$ ;

c) dacă  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ , atunci  $-\frac{1}{2} \leq ab + ac + bc \leq 1$ .

□ 49. Dacă  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sunt numere reale pozitive cu suma egală cu 1, să se arate că:

a)  $\sqrt{x_1(x_2 + x_3 + \dots + x_n)} + \sqrt{x_2(x_1 + x_3 + \dots + x_n)} + \dots +$   
 $+ \sqrt{x_n(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})} \leq \frac{n}{2}.$

b)  $\frac{x_1x_2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2x_3}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_nx_1}{x_n + x_1} < \frac{1}{2}.$

$$c) \sqrt{\frac{x_2 + x_3 + \dots + x_n}{x_1}} + \sqrt{\frac{x_1 + x_3 + \dots + x_n}{x_2}} + \dots + \sqrt{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{x_n}} < \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right).$$

□ 50. Dacă  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sunt numere reale pozitive, să se arate că:

$$\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_1 a_3} + \dots + \sqrt{a_1 a_n} + \sqrt{a_2 a_3} + \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{n-1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

□ 51. Să se demonstreze că dacă  $a, b, c$  sunt lungimile laturilor triunghiului ABC, atunci:

a)  $b(a^2 + c^2) + c(a^2 + b^2) + a(b^2 + c^2) > a^3 + b^3 + c^3$ ;

b)  $a^2 < 2(b^2 + c^2)$ ;

c)  $m(\hat{A}) = 90^\circ$  dacă și numai dacă  $\sqrt{2(a+b)} = \sqrt{a+c} + \sqrt{a-c}$ .

□ 52. Să se demonstreze că:

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + c^2} \geq \sqrt{2}(a + b + c), \text{ oricare ar fi } a, b, c > 0.$$

□ 53. Să se demonstreze că oricare ar fi  $a \geq 1$  are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} > 2\sqrt{a+1} - 2\sqrt{a}.$$

□ 54. Fie  $a, b, c$  numere reale pozitive. Să se arate că:

a) dacă  $a + b + c = 1$ , atunci  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$ ;

b) dacă  $a + b + c = 1$ , atunci  $ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}$  și  $abc \leq \frac{1}{27}$ ;

c) dacă  $abc = 1$ , atunci  $a + b + c \geq 3$ .

□ 55. Să se demonstreze că:

a)  $\sqrt{25x^2 - 20x + 20} + \sqrt{y^2 - 6\sqrt{2}y + 19} > 5, \forall x, y \in \mathbb{R}$ ;

b)  $\sqrt{4x^2 + 8x + 85} + \sqrt{5x^2 + 10x + 69} + \sqrt{6x^2 + 12x + 55} \geq 18, \forall x \in \mathbb{R}$ ;

c)  $\sqrt{x^2 + 4x + 31} + \sqrt{4y^4 + 8y^2 + 29} + \sqrt{9z^2 + 12z + 53} > 15, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ .

□ 56. Fie  $x, y, z$  numere reale pozitive astfel încât  $x + y + z = xyz$ . Să se arate că  $36 \leq 4(xy + yz + zx) \leq 4xy + x^2y^2z^2$ .

□ 57. Să se demonstreze că:

$$\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(x+z)} + \sqrt{z(x+y)} \leq \sqrt{2}(x+y+z), \forall x, y, z \in (0, +\infty).$$

- 58. Dacă  $x, y, z$  sunt numere reale pozitive, să se arate că:  
 $x(y+1) + y(z+1) + z(x+1) \geq 6\sqrt{xyz}$ .
- 59. Dacă  $x$  este număr real pozitiv, să se demonstreze că:  
 a)  $\sqrt{x} \leq \frac{1+x}{2}$ ;                      b)  $\sqrt{\frac{1-x}{x}} \leq \frac{1}{2x}$ .
- 60. Dacă  $a, b, c$  sunt numere reale astfel încât  $a + b + c = 1$ , atunci:  
 $\sqrt{3a+1} + \sqrt{3b+2} + \sqrt{3c+3} \leq 6$ .
- 61. Dacă  $a, b, c, d$  sunt numere pozitive astfel încât  $a + b + c + d = 1$ , să se arate că  $\sqrt{8a+1} + \sqrt{8b+1} + \sqrt{8c+1} + \sqrt{8d+1} < 8$ .
- 62. Să se arate că:  
 a)  $\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \frac{\sqrt{20}}{9} + \frac{\sqrt{30}}{11} + \frac{\sqrt{42}}{13} < 3$ ;  
 b)  $\frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{20}}{9} + \frac{\sqrt{42}}{13} + \dots + \frac{\sqrt{2n(2n+1)}}{4n+1} < \frac{n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- 63. Se consideră numerele pozitive  $a_1, a_2, \dots, a_n$  cu produsul egal cu 1. Să se demonstreze că:  $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 2^n$ .
- 64. Se consideră numerele reale pozitive  $a$  și  $b$ . Să se demonstreze inegalitatea:  $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- 65. Să se demonstreze că pentru  $\forall a \in \mathbb{Q}$  are loc relația:  $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2$ .
- 66. Fie  $x, y, z, t \in (0, +\infty)$ .  
 Să se arate că  $\frac{x}{x+z+t} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{x+y+z} + \frac{t}{y+z+t}$  nu este număr natural.
- 67. Să se compare numerele reale  $a, b, c$  știind că  $a=2$ ,  $b=3x-1$ ,  $c=5-x$ , iar  $x \in \mathbb{R}$ .
- 68. Să se determine numerele  $x, y, z \in \mathbb{N}^*$  știind că este verificată inegalitatea  $xyz + x + y + z \leq xy + xz + yz + 1$ .
- 69. Fie  $a, b, c$  lungimile laturilor triunghiului ABC care verifică relația:  
 $\sqrt{a^2 - 12a + 40} + \sqrt{b^2 - 6\sqrt{3}b + 28} + \sqrt{c^2 - 6c + 25} \leq 7$ . Să se determine lungimile laturilor triunghiului și măsurile unghiurilor acestuia.